東京女子大学　知のかけはし入学試験（数学的思考力型）
「基礎学力試験（数学）」　サンプル問題

問 1. $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき, $\sin 4\theta$ の値を求めよ。

問 2. 1 個のさいころを n 回投げたとき，初めて 1 の目が出るまでにさいころを投げた回数を X_n とする。ただし，1 の目が出なかったときは $X_n = 0$ とする。$0 \leqq k \leqq n$ に対して，$X_n = k$ となる確率を p_k とおく。このとき，以下の設問に答えよ。

(1) $1 \leqq k \leqq n$ に対して，p_k を求めよ。

(2) $E = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kp_k$ を求めよ。

問 3. 正の実数 x, y が $(\log_{10} x)^2 + (\log_{10} y)^2 = 2$ をみたすとき, xy の最大値および最小値を求めよ。

問 4. 関数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{|x-1|} & (x \neq 1) \\ 3 & (x = 1) \end{cases}$ について, 以下の設問に答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け。

(2) $f(x)$ が $x = 1$ で連続かどうかを調べよ。

1

出題のねらい

倍角の公式など，三角関数に関する基本的な計算能力をみる問題である。

解答例

倍角の公式を繰り返し用いると

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta > 0$ なので，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

これを代入すると

$$\sin 4\theta = 4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right\} = \boldsymbol{-\frac{56\sqrt{2}}{81}}$$

2

出題のねらい

確率と期待値に関する問題である。期待値の計算では等比数列の和の公式を導出する際の考え方を援用する応用力が問われている。

解答例

(1): $1 \leqq k \leqq n$ とする。このとき，$X_n = k \iff$ 最初の $k-1$ 回では 2 から 6 の目のどれかが出て，k 回目に 1 の目が出る，である。したがって，その確率は

$$p_k = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5^{k-1}}{6^k}}$$

(2):

$$E = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \sum_{k=1}^{n} kp_k = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}
E &= 6E - 5E \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \\
&= \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} - n\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \\
&= \boldsymbol{6 - (n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

3

出題のねらい
対数関数に関する計算能力をみる問題である。対数をとることにより和と積を連関させて解くことが求められる。

解答例
$X = \log_{10} x,\ Y = \log_{10} y$ とおくと，

$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y = X + Y \iff xy = 10^{X+Y}$$

より xy の最大値・最小値はそれぞれ $X+Y$ の最大値・最小値に対応する。与えられた条件

$$(\log_{10} x)^2 + (\log_{10} y)^2 = X^2 + Y^2 = 2$$

より点 (X, Y) は原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円上にある。よって $X + Y = k$ とおくとき，直線 $\ell : X + Y = k$ と円 $C : X^2 + Y^2 = 2$ が共有点を持つような k の範囲を求めればよいが，これは C の中心 $(0, 0)$ と ℓ との距離が C の半径 $\sqrt{2}$ 以下であればよいので，点と直線の距離の公式より

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leqq \sqrt{2} \iff |k| \leqq 2 \iff -2 \leqq k \leqq 2$$

よって $X+Y = \log_{10} xy$ の最大値および最小値はそれぞれ $2, -2$ であるから，$xy = 10^{X+Y}$ の最大値は $10^2 = \mathbf{100}$，最小値は $10^{-2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$ である。

知のかけはし入試 サンプル問題

4

出題のねらい
関数の連続性について，数学的な定義と図形的意味の双方の理解を問う。

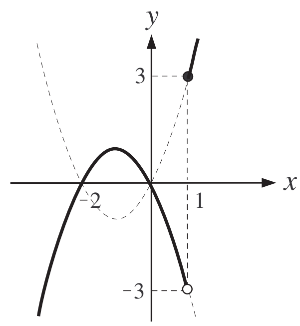
解答例
(1): $x \neq 1$ のとき，

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x > 1) \\ -(x-1) & (x < 1) \end{cases}$$

であることから，

$$f(x) = \frac{x(x+2)(x-1)}{|x-1|} = \begin{cases} x^2+2x & (x > 1) \\ -x^2-2x & (x < 1) \end{cases}$$

となる。従って，$y = f(x)$ のグラフは**下図の通り**である。



(2): $x = 1$ において

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (x^2 + 2x) = 3$$
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (-x^2 - 2x) = -3$$

である。従って $x = 1$ における右側からの極限値と左側からの極限値が異なるので，$x = 1$ における極限値 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ は存在しない。従って $f(x)$ は $x = 1$ で**連続ではない**。