東京女子大学大学院博士前期課程

2025年度一般(9月期)
入学試験問題

理学研究科　数理科学専攻

専門科目(共通問題)(解答用紙5枚)
専門科目(選択問題)(解答用紙3枚)
外国語(英語)(解答用紙1枚)

※	受験番号	

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般９月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（共通問題）試験問題　１／１

次の5問題を1題ごとに1枚の解答用紙を用いて解答せよ。

1. a を定数とする。x_1, x_2, x_3, x_4 に関する次の連立一次方程式に解があるか判定し，解がある場合には求めよ。

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$

2. 実数 x_1, x_2, x_3, x_4 が $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3$ を満たしながら動くとき，

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4$$

の最大値および最小値と，そのときの x_1, x_2, x_3, x_4 の値をそれぞれ求めよ。

3. 関数 $f(x) = \log(1 + x + x^2)$ をマクローリン展開したときの3次までの項を求めよ。

4. 次の不定積分を求めよ。

$$\int e^x \left(\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1} x \right) dx$$

5. A, B を集合とし，$f : A \to B$ を写像とする。このとき，以下の設問に答えよ。

(1) f が全射であることの定義を述べよ。

(2) f が単射であることの定義を述べよ。

(3) f が全単射であることの定義を述べよ。

(4) $A = B$ のとき，任意の $a \in A$ に対し $f(f(a)) = a$ が成り立つならば，f は全単射であることを示せ。

※	受験番号	

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般９月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（選択問題）試験問題　１／４

以下の 8 問題の中から 3 問題を選んで，1 題ごとに 1 枚の解答用紙を用いて解答せよ。

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$xy' - 2y = x^3 \cos x$$

2. $M_2(\mathbb{R})$ で実 2 次正方行列全体のなす集合を表す。$M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 G を次のように定める。

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

このとき，G は行列の積に関して可換群をなすことを示せ。

3. $\mathbb{R}^2$ を 2 次元ユークリッド空間とする。写像 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，$\mathbb{R}^2$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対し

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

で定義する。このとき，以下の設問に答えよ。

(1) $\mathbb{R}^2$ の任意の 3 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ において

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \le 1\}$ を $\mathbb{R}^2$ 上に図示せよ。ここで $\boldsymbol{0} = (0, 0)$ である。

4. $c > 0$ を定数とする。連続型確率変数 X の確率密度が

$$f(x) = \begin{cases} cx & (0 \le x \le 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるとき，以下の設問に答えよ。

(1) c の値を求めよ。

(2) X の平均 $E[X]$ を求めよ。

(3) X の分散 $V[X]$ を求めよ。

(4) X の分布関数 $F(t) := P[X \le t]$ $(t \in \mathbb{R})$ を求めよ。

※	受験番号	

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般９月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（選択問題）試験問題　２／４

5.　１次元の調和振動子のラグランジアンは

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \tag{i}$$

で与えられる。ただし $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ は粒子の速度，m は粒子の質量，k はバネ定数である。

時刻 t_0 から t_1 までの粒子の運動を考える。この運動の下での粒子の軌跡 $x(t)$ に対する作用は

$$S[x] = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(x,\dot{x}) \tag{ii}$$

で与えられる。

粒子の軌跡を $x(t)$ から $x(t)+\delta x(t)$ へと，微小変位 $\delta x(t)$ だけずらす。ただし，t_0 と t_1 ではずらさない：$\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$。

(1) 一般化運動量 $p = \dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}$ を求めよ。

(2) 一般化力 $f = \dfrac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x}$ を求めよ。

(3) 微小変位 δx に対する作用の変分

$$\delta S[x] := S[x+\delta x] - S[x] \tag{iii}$$

を，微小量 δx の１次まで求めよ。

[ヒント: $S[x+\delta x] = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} dt\, L(x+\delta x,\, \dot{x}+\delta\dot{x})$ である。結果は $\delta\dot{x}$ についても１次まで取ればよい。]

(4) $\delta\dot{x} = \dfrac{d}{dt}\delta x$ を用いてから部分積分することにより，単振動の運動方程式を求めよ。

(5) 単振動の一般解を書き下せ。

(6) 単振動の角周波数を m と k で表せ。

6.　自然単位系 $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ を取る。電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ および電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ が与えられたときに，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ および磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ の従うマクスウェル方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{i}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{ii}$$

となることを用いてよい。このとき，以下の設問に答えよ。

(1) 電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} \tag{iii}$$

を導け。

[ヒント: 式 (i) の右式の両辺の発散 $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ を取る。]

※	受験番号	

※記入しないこと

(2) ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ およびスカラー・ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x},t)$ を用いて，電磁場を

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{iv}$$

と書き換えたとき，電磁場自身の相互作用の式 (ii) が左右どちらも満たされることを示せ。

微小パラメタ $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ を用いて，以下の座標変換 (微小ブースト) を考える:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t + \cdots, \qquad t' = t - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} + \cdots \tag{v}$$

ただし「$\cdots$」は $v := |\boldsymbol{v}| \ll 1$ の 2 次以上の微小量 $\mathcal{O}(v^2)$ を表し，以下の計算では常に無視する。変換パラメタ $\boldsymbol{v}$ は，空間および時間座標 $(\boldsymbol{x},t)$ に依らない定数である。座標変換 (v) の下で，偏微分は

$$\boldsymbol{\nabla}' = \boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial t} + \cdots, \qquad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \cdots \tag{vi}$$

と変換する。

(3) 電流密度および電荷密度の変換を，上の座標変換 (v) に倣って以下のように仮定する:

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{v}\rho + \cdots, \qquad \rho' = \rho - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j} + \cdots . \tag{vii}$$

この変換後も，電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{j}' \tag{viii}$$

が，微小量 $\boldsymbol{v}$ の 2 次以上を無視する範囲で成立することを示せ。

[ヒント: 式 (vi)，(vii) を代入し，変換前の電荷の保存則 (iii) を用いる。代入する際，言うまでもなく $\dfrac{\partial \rho'}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial t'}\rho'$ である。]

(4) $\boldsymbol{A}$ と ϕ の変換を，上の座標変換 (v) に倣って以下のように仮定する:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{v}\phi + \cdots, \qquad \phi' = \phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} + \cdots . \tag{ix}$$

このとき，変換後の電磁場

$$\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{\nabla}'\phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t'}, \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{A}' \tag{x}$$

を，$\boldsymbol{\nabla}$，$\dfrac{\partial}{\partial t}$，$\boldsymbol{A}$，$\phi$ で表せ。

[ヒント: 上と同様である。微小量 $\boldsymbol{v}$ の 2 次以上は無視する。]

(5) 得られた変換後の $\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{B}'$ の表式を，変換前の $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ を用いて表せ。

[ヒント: 式 (iv) を用いる。$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ に式 (iv) を代入した結果は，$\boldsymbol{v}$ が定数であることに注意すると $\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}$ となる。また，$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\phi) = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nabla}\phi$ を用いてよい。]

※	受験番号	

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般９月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（選択問題）試験問題　４／４

(6) 粒子の速度が光速より十分遅く $\boldsymbol{v}$ と同程度であるとき，座標変換 (v) により

$$\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - \boldsymbol{v} + \cdots \qquad \text{(xi)}$$

と変換される。特定の粒子のある瞬間の速度を打ち消すよう，適切に $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \cdots$ と取ることにより，その瞬間の速度が $\dfrac{d\boldsymbol{x}'}{dt'} = 0$ となるような座標系 (静止系) に移ることができる。このような静止系においては，ローレンツ力は電場からのみの力となる:

$$\boldsymbol{F}' = q\left(\boldsymbol{E}' + \frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'} \times \boldsymbol{B}'\right) = q\boldsymbol{E}'. \qquad \text{(xii)}$$

ただし q はいま考えている粒子の電荷。設問 (5) で求めた電場 $\boldsymbol{E}'$ の表式から，得られた結果 (xii) を考察せよ。

7. T は絶対温度，S はエントロピー，P は圧力，V は体積，U は内部エネルギーとする。

(1) 巨視的な物体が圧力 P のもとで微小体積 dV だけ膨張する際に，外部に対してなす仕事は PdV である。絶対温度 T 一定の下で n mol の理想気体の体積が V_1 から V_2 に変化したとき，この気体が外部になした仕事 W が

$$W = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

と表されることを示せ。R は気体定数である。

(2) 熱力学第一法則によると, 内部エネルギー U の準静的な微小変化は

$$dU = TdS - PdV \qquad \text{(i)}$$

と書ける。よって，U は S と V の関数とみなすことができて

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P \qquad \text{(ii)}$$

が成り立つ。式 (ii) からさらに，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \qquad \text{(iii)}$$

が得られる。ギブズエネルギー $G = U + PV - TS$ について式 (i)，(ii) に相当する式を書け。途中の計算と説明も示すこと。また, 式 (ii) から式 (iii) が得られることを説明せよ。

8. n を正の整数とする。節点数 n の完全 2 分木の高さが h であるとき，以下の設問に答えよ。ただし，高さ h の完全 2 分木とは，すべての葉の深さが h または $h-1$ であり，深さ h の葉が少なくとも一つ存在し，深さ h の葉の全体が左側から詰められている 2 分木のことをいう。

(1) $i = 0, 1, \ldots, h-1$ に対して，深さ i の節点は全部で 2^i 個あることを示せ。

(2) $2^h \leq n$ であることを示せ。

(3) $n < 2^{h+1}$ であることを示せ。

(4) $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$ であることを示せ。ただし，実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す。

※

受験番号

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般９月期
理学研究科　数理科学専攻　　外国語（英語）試験問題　１／１
＜辞書使用可。種類や冊数の制限なし。電子辞書は使用不可。＞

次の英文を読み, 問 1, 2 に答えよ.

著作権の関係上、省略します。

出典：Introduction to Linear Algebra, 6th Edition by Gilbert Strang. Copyright © 2023 Gilbert Strang. Reproduced with permission of Cambridge University Press through PLSclear.

問 1　上の英文の全文を和訳せよ。

問 2　「Row way」と「Column way」の二つの方法で以下の行列の積を計算せよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$