東京女子大学大学院博士前期課程

2025年度一般(1月期)
入学試験問題

理学研究科　数理科学専攻

専門科目(共通問題)(解答用紙5枚)
専門科目(選択問題)(解答用紙3枚)
外国語(英語)(解答用紙1枚)

※	受験番号	

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般１月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（共通問題）試験問題　１／１

次の５問題を１題ごとに１枚の解答用紙を用いて解答せよ。

1. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^5$ において $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を以下のようにとる。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$W_1 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$, $W_2 = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ とするとき，以下の設問に答えよ。

(1) $W_1 + W_2$ の基底と次元を求めよ。

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ。

2. A を実 n 次正方行列であって，$A^2 = I$ を満たすものとする。ここで I は n 次単位行列である。

(1) A の固有値は ± 1 に限ることを示せ。

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$(I - A)\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(I - A)\boldsymbol{v}$ は A の固有ベクトルであることを示せ。

(3) A は対角化可能であることを示せ。

3. 関数 $f(x) = e^{x \sin x}$ をマクローリン展開したときの３次までの項を求めよ。

4. $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{x^n \sqrt{1 - x^2}}$ のとき，

$$I_n = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

となることを示せ。

5. 集合 A, B, C に対し, $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ を写像とする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) 合成写像 $\psi \circ \varphi$ が全射ならば, ψ は全射であることを示せ.

(2) 合成写像 $\psi \circ \varphi$ が単射ならば, φ は単射であることを示せ.

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi$ は全単射だが, φ は全射でなく, ψ は単射でないような具体例を挙げよ.

※

※記入しないこと

受験番号	

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般１月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（選択問題）試験問題　１／３

以下の 9 問題の中から 3 問題を選んで，1 題ごとに 1 枚の解答用紙を用いて解答せよ。

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' + 3y' + 2y = 0$

(2) $y'' + 3y' + 2y = e^x$

2. 以下の設問に答えよ。

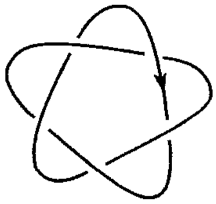
(1) m を 2 以上の整数として，$2^m - 1$ が素数であるならば，m は素数であることを示せ。

(2) K を標数が 2 である有限体とし，$K^\times$ をその単元群とする。$K^\times$ において位数 73 の元が存在するような K の位数の最小値を求めよ。

3. 以下の設問に答えよ.

(1) 有向結び目 K に対し, K の種数 $g(K)$ の定義を述べよ。

(2) 有向結び目 K を下図の結び目とするとき，$g(K)$ の値を求めよ。



K

4. 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 S, D を

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, \\ D &= \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

で定義する。このとき，以下の設問に答えよ。

(1) D の 2 次元ホモロジー群 $H_2(D)$ を求めよ。

(2) S の 2 次元ホモロジー群 $H_2(S)$ を求めよ。

(3) $M = S \cup D$ の 2 次元ホモロジー群 $H_2(M)$ を求めよ。

※	受験番号	

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般１月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（選択問題）試験問題　２／３

5. 連続型確率変数 X の確率密度 f が

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられているとき，以下の設問に答えよ。

(1) すべての $u \geq 0$ に対して，$\mathbb{P}[X \geq u]$ を求めよ。

(2) すべての $s, u \geq 0$ に対して，$\mathbb{P}[X \geq s + u \mid X \geq s]$ を求めよ。

(3) すべての $t < 1$ に対して，X の積率母関数 $\mathbb{E}[e^{tX}]$ を求めよ。

6. $\lambda > 0$ を未知の定数とする。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ をパラメータ λ のポアソン母集団からの大きさ n の無作為標本とする。ここで離散型確率変数 Y がパラメータ λ のポアソン分布に従うとは，

$$\mathbb{P}[Y = y] = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \quad (y = 0, 1, 2, \ldots)$$

で与えられることをいう。$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，x_k を X_k の実現値とするとき，以下の設問に答えよ。

(1) X_1 の平均 $\mathbb{E}[X_1]$ を求めよ。

(2) 尤度関数 $L_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を求めよ。

(3) λ の最尤推定量を求めよ。

7. 互いに区別できる 2 つのスピン 1/2 粒子の複合系を考える。軌道角運動量は 0 とする。それぞれの粒子のスピン演算子を $\boldsymbol{S}' = (S'_x, S'_y, S'_z)$ および $\boldsymbol{S}'' = (S''_x, S''_y, S''_z)$ と表す。

各粒子について，スピン z 成分が $\hbar/2$ の状態を $|{\uparrow}\rangle$，$-\hbar/2$ の状態を $|{\downarrow}\rangle$ と記し，複合系の状態を次のように書く:

$$|{\uparrow\uparrow}\rangle := |{\uparrow}\rangle \otimes |{\uparrow}\rangle, \qquad |{\uparrow\downarrow}\rangle := |{\uparrow}\rangle \otimes |{\downarrow}\rangle, \qquad |{\downarrow\uparrow}\rangle := |{\downarrow}\rangle \otimes |{\uparrow}\rangle, \qquad |{\downarrow\downarrow}\rangle := |{\downarrow}\rangle \otimes |{\downarrow}\rangle. \tag{i}$$

複合系の全スピン演算子を $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}' + \boldsymbol{S}''$ $(= \boldsymbol{S}' \otimes 1 + 1 \otimes \boldsymbol{S}'')$ とし，その固有状態を次のように表す:

$$\boldsymbol{S}^2 |J, M\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J, M\rangle, \qquad S_z |J, M\rangle = \hbar M |J, M\rangle. \tag{ii}$$

以下の設問に答えよ。

(1) 式 (i) の 4 つの状態について，S_z の固有値を求めよ。

(2) 式 (ii) の状態 $|1, 1\rangle$ を，式 (i) の状態を用いて表せ。

(3) 下降演算子 $S_- := S_x - iS_y$ を作用させることにより，$|1, 0\rangle$ および $|1, -1\rangle$ を，式 (i) の状態を用いて表せ。

(4) $|0, 0\rangle$ を，$|1, 0\rangle$ に直交する状態として，式 (i) の状態を用いて求めよ。

(5) 状態 $|0, 0\rangle$ において，片方の粒子のスピン z 成分の測定結果が $|{\uparrow}\rangle$ だった場合と $|{\downarrow}\rangle$ だった場合について，それぞれもう一方の粒子のスピン z 成分の測定結果を述べよ。

(6) 状態 $|0, 0\rangle$ が量子もつれ状態であることを以下の手順で確認せよ: 密度行列 $|0, 0\rangle \langle 0, 0|$ について，片方の粒子についての部分トレースを取り，得られた縮約密度行列が射影演算子でないことを示せ。

※	受験番号	

※記入しないこと

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般１月期
理学研究科　数理科学専攻　　専門科目（選択問題）試験問題　３／３

8. 5 次正方行列 A に行および列の基本変形を行う行列に関して，以下の設問に答えよ。

(1) 行列 A の第 2 行と第 4 行を入れ替える行列 E_1 を求めよ。すなわち，E_1A は A の第 2 行と第 4 行が入れ替わった行列となる。

(2) 行列 A の第 1 行の α 倍を第 3 行に加える行列 E_2 を求めよ。すなわち，E_2A は A の第 3 行に第 1 行の α 倍が加えられた行列となる。

(3) (2) で求めた行列 E_2 を用いて，AE_2 は行列 A に対してどのような変形を行うことになるか示せ。

(4) E_1E_2 の逆行列を求めよ。

(5) 次の 4 次正方行列 B に対して，行の基本変形を用いて B の LU 分解を求めよ。

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

9. 前駆平衡反応

$$\mathrm{A} \rightleftharpoons \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C} \qquad \text{(i)}$$

を考える。k_f は $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$, k_b は $\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{B}$, k_r は $\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$ の速度定数であり，これらは全て 1 次反応であるとする。

(1) $\dfrac{d[\mathrm{B}]}{dt}$ を k_f, k_b, k_r, [A], [B] を用いて表せ.

(2) 上の結果に定常状態近似を適用し, 次式を導け.

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{k_\mathrm{r}k_\mathrm{f}}{k_\mathrm{b}+k_\mathrm{r}}[\mathrm{A}] \qquad \text{(ii)}$$

(3) 式 (ii) は, 実験で反応次数を求めるだけでは, 単純な 1 次反応 $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{C}$ と中間体 B を含む反応 (i) を区別することができないことを示している。ただし，反応速度の温度依存性を調べることによって両者を区別できる場合もある。どのような場合か説明せよ.

※

※記入しないこと

受験番号	

東京女子大学大学院（博士前期課程）
２０２５年度入学試験　一般１月期
理学研究科　数理科学専攻　　外国語（英語）試験問題　１／１
＜辞書使用可。種類や冊数の制限なし。電子辞書は使用不可。＞

以下の英文を和訳せよ。

著作権の関係上、省略します。

出典：Foundations of Data Science by Avrim Blum, John Hopcroft and Ravindran Kannan.