

東京女子大学大学院博士前期課程

2026年度一般(9月期)

入学試験問題

理学研究科 数理科学専攻

専門科目(解答用紙4枚)

※

※記入しないこと

受験 番号	
----------	--

東京女子大学大学院（博士前期課程）

2026年度入学試験 一般9月期

理学研究科 数理科学専攻 専門科目 試験問題 1/3

次の4問題を1題ごとに1枚の解答用紙を用いて解答せよ。

1. 以下の $\mathbb{R}^3$ のベクトルを考える。

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f は $f(a_i) = b_i$ ($1 \leq i \leq 3$) をみたしている。このとき $c = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ の f による像を求めよ。

2. 以下の設問に答えよ。

(1) 非負整数 n に対し、 $I_n = \int \tan^n x dx$ とおく。 $n \geq 2$ のとき、 I_n を I_{n-2} を用いて表せ。(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ を求めよ。3. 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$ において、写像 $f: A \rightarrow A$ を、 $x \in A$ に対し $f(x) = \frac{-x}{x+1}$ で定義する。このとき、以下の設問に答えよ。(1) f を n 回合成した写像 $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ 回}}$ について、 $x \in A$ に対し $f^n(x)$ を x で表せ。(2) f は全単射であることを示せ。(3) $x \in A$ に対し $f^{-1}(x)$ を x で表せ。

4. 以下の5問の中から、進学後に研究を計画している研究細目の問題を1問選択して解答せよ。

(確率統計) X を実数に値をとる連続型確率変数とし、その確率密度関数を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

とする。 $Y = \exp(X)$ とおくとき、次の問いに答えよ。(1) $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、 $\mathbb{E}[Y^\lambda]$ を求めよ。(2) $a \in \mathbb{R}$ に対して $\Phi(a) = \mathbb{E}[(Y-a)^2]$ とおく。このとき、 Φ の最小値を求めよ。(3) $b > 0$ に対して $F(b) = \mathbb{P}[X \geq b]$ とおく。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$F(b) \leq \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{b^2}{2}\right).$$



※記入しないこと

受験 番号	
----------	--

東京女子大学大学院（博士前期課程）

2026年度入学試験 一般9月期

理学研究科 数理科学専攻 専門科目 試験問題 2/3

(理論物理学) 自然単位系 $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ で書く. 電荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ と電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ が与えられたとき, スカラー・ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ とベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ の従う作用は

$$S[\phi, \mathbf{A}] = \int dt \int d^3x \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right) \quad (\text{i})$$

である. ただし, 電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ および磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ は, スカラーおよびベクトル・ポテンシャルから以下のように与えられている:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{ii})$$

作用 (i) の変分から, マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{iii})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{iv})$$

を導いていこう. この変分においては, $\rho(\mathbf{x}, t)$ と $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ は外場として与えられるものと考え変分しない. 以下の問に答えよ.

(1) 電磁場が式 (ii) で与えられるとき, 電磁場自身の方程式 (iv) が左右どちらも満たされることを示せ.

(2) 電磁場 (ii) を変分すると以下ようになる:

$$\delta \mathbf{E} = -\nabla \delta \phi - \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A}, \quad \delta \mathbf{B} = \nabla \times \delta \mathbf{A}. \quad (\text{v})$$

これを用いて, 作用の変分 $\delta S = 0$ から, 電磁場と物質との相互作用の方程式 (iii) を導け. 時間および空間座標の部分積分において, 表面項は無視してよい.

[ヒント: $\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = 2\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E}$ 等を用いてよい. 作用第2項の変分は, $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) = \sum_{j,k,l} B_j \epsilon_{jkl} \partial_k \delta A_l$ として ∂_k を部分積分すると簡単.]

(3) 電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (\text{vi})$$

を導け.

[ヒント: 式 (iii) の右式の両辺の発散 $\nabla \cdot$ を取る.]

(4) 電磁場 (ii) が以下のゲージ変換

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (\text{vii})$$

の下で不変であることを示せ, ただし $\chi(\mathbf{x}, t)$ は任意関数.

(5) 作用 (i) がゲージ変換 (vii) の下で不変であることを示せ.

※

※記入しないこと

受験 番号	
----------	--

東京女子大学大学院（博士前期課程）

2026年度入学試験 一般9月期

理学研究科 数理科学専攻 専門科目 試験問題 3/3

(応用数学) ハノイの塔は次のようなルールをもつパズルである。三本のポール A, B, C と、大きさの異なる複数の円盤があり、円盤には 1, 2, 3, ... と番号がついている。番号の小さい円盤ほど小さく、常に大きい円盤の上に小さい円盤しか置くことはできない。初期状態では、すべての円盤がポール A に、大きいものを下にして積み重なっている。一度に動かせるのは一番上の円盤一枚だけであり、この制約の下で円盤を移動させていく。目的は、すべての円盤をポール C に移すことである。このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 円盤が n 枚あるとき、すべての円盤をポール A からポール C に移すために必要な最小の移動回数を求めよ。
- (2) 円盤が n 枚あるとき、最短手順において最初に移動される番号 1 の円盤はどのポールに移動されるか答えよ。
- (3) 5 枚の円盤が現在次のように配置されている。ポール A には下から順に 5, 4, 3, ポール B には 2, ポール C には 1 が置かれている。この状態からすべての円盤をポール C に移すために必要な最小の移動回数を求めよ。
- (4) すべての円盤をポール A からポール C に移すアルゴリズムを、Python コードまたは擬似コードで書け。

(情報科学1) 整数値 8, 2, 16, 32, 1, 4 が、この順に要素数 6 の配列 $a[]$ に格納されている。このとき、以下の設問に答えよ。ただし、配列の添え字は 0 から始まるとする。

- (1) 整列アルゴリズムの例を一つ挙げ、それを用いて $a[]$ に格納されている整数列を昇順に整列せよ。ただし、用いた整列アルゴリズムを説明したうえで、整列過程を記述すること。
- (2) (1) で挙げた整列アルゴリズムの最悪時間計算量を O 記法を用いて表せ。ただし、そのように表すことができる理由も説明すること。
- (3) (1) で整列した結果に対して、整数値 12 を目的の値として二分探索を行え。ただし、二分探索のアルゴリズムを説明したうえで、探索過程を記述すること。

(情報科学2) (母) 平均 μ_1 , (母) 分散 σ_1^2 の正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ から独立に発生した N_1 個のデータと、(母) 平均 μ_2 , (母) 分散 σ_2^2 の正規分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ から独立に発生した N_2 個のデータが混ざりあったデータ集合 $D = \{x_i \mid i = 1, 2, \dots, N, N = N_1 + N_2\}$ を観測したとする。 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ から発生したデータをクラス 1 に属するデータ、 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ から発生したデータをクラス 2 に属するデータと呼ぶとき、データ x_i がクラス k ($= 1, 2$) に属する確率 $w_i^{(k)}$ を推定するアルゴリズムを導出したい。なお、 $N_1, N_2, \mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ はすべて未知であり、 N のみが既知であるとする。

- (1) $w_i^{(k)}$ の初期値が与えられたとき、クラス k に属するデータの数 N_k を、 $w_i^{(k)}$ を用いて推定せよ。
- (2) クラス k に属するデータの平均 μ_k を、 $N_k, x_i, w_i^{(k)}$ を用いて推定せよ。
- (3) クラス k に属するデータの分散 σ_k^2 を、 $N_k, x_i, \mu_i, w_i^{(k)}$ を用いて推定せよ。
- (4) クラス k に属するデータ全体の確率密度を $p_k(x)$ と書くことにする。 $p_1(x), p_2(x), N_1, N_2$ を用いて、混ざりあったデータ全体の確率密度 $p(x)$ を推定せよ。
- (5) x_i の尤度 $p(x_i)$ を、(4) の結果を参考に比例配分することで $w_i^{(k)}$ が推定できる。 $w_i^{(k)}$ を求めよ。
- (6) 以上を参考に、 x_i が属するクラス k を推定するアルゴリズムを導出し、その手順を記せ。

（出題のねらい）

1. 線形写像に関する基本的な理解を問う問題である。
2. 部分積分で正確に漸化式を作れるか、漸化式を利用して基本的な積分計算を正確にできるかを問うのがこの問題のねらいである。
3. 集合と写像に関する基礎事項の定着度を確認する。
4. （確率統計）
確率統計における基本的な計算力を見るのが、この問題のねらいである。いろいろな確率分布の中でも特に重要な標準正規分布を取り上げて、期待値の計算とその処理の仕方が問われている。

（理論物理学）

古典電磁気学のラグランジアン形式を理解しているかを問うた。スカラー・ベクトルポテンシャルを基本変数とする作用（式 (i)）から、変分原理によりマクスウェル方程式（式 (iii), (iv)）と電荷保存則を導出させ、さらにゲージ変換における場と作用の不変性まで問うことで、ベクトル解析・部分積分・対称性といった基本技法と、場の理論の根本概念を一貫して確認する。

（応用数学）

再帰的思考と漸化式によるアルゴリズム理解を確認すること。

（情報科学 1）

整列アルゴリズムとその時間計算量、および二分探索についての問題である。アルゴリズムとデータ構造に関する基礎的内容についての理解度を確認するのが、この問題のねらいである。

（情報科学 2）

データ分析における基礎的事項とアルゴリズムの導出についての理解度を確認する。