

※

受験
番号

※記入しないこと

東京女子大学

2026年度 社会人入学試験

現代教養学部 情報数理科学科 数学 試験問題 1 / 1

次の4問題を1題ごとに1枚の解答用紙を用いて解答せよ。

1. 実数 x, y が $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ をみたすとき、以下の設問に答えよ。(1) x の取りうる値の範囲を求めよ。(2) $x + 2y$ の最大値および最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。2. 座標空間において、点 $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を頂点とする四面体 $OABC$ がある。四面体 $OABC$ の辺 AB を $3:2$ に内分する点を P , 辺 BC を $2:1$ に内分する点を Q とするとき、以下の設問に答えよ。(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を成分表示せよ。(2) 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を求めよ。(3) $\triangle OPQ$ の面積を求めよ。

3. 半径1の円に内接する正六角形の6個の頂点の中から、異なる2つの頂点を選ぶ。このとき、以下の設問に答えよ。

(1) 2点間の距離が1となる確率を求めよ。

(2) 2点間の距離が $\sqrt{3}$ となる確率を求めよ。

(3) 2点間の距離が2となる確率を求めよ。

(4) 2点間の距離の期待値を求めよ。

4. 以下の設問に答えよ。

(1) 関数 $y = \sin x + 2 \cos x$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。(2) 定積分 $\int_0^\pi |\sin x + 2 \cos x| dx$ を求めよ。

解答用紙

問1...B4判 (横書き) 罫なし1枚
問2...B4判 (横書き) 罫なし1枚
問3...B4判 (横書き) 罫なし1枚
問4...B4判 (横書き) 罫なし1枚

1

出題のねらい

2変数関数に対する理解を問うのが、この問題のねらいである。

解答例

(1): $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ を y の2次方程式とみる。

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 1 = 0$$

方程式をみたす y が存在するのであるから、判別式は0以上である。

$$\frac{D}{4} = x^2 - (2x^2 - 1) = -x^2 + 1 \geq 0$$

従って $(x-1)(x+1) \leq 0$ より、 $-1 \leq x \leq 1$ である。

(2): $x + 2y = k$ とおくと、 $y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2}$ である。これを $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ に代入して計算すると、

$$13x^2 - 6kx + k^2 - 4 = 0$$

上の式をみたす x が存在するので、

$$\frac{D}{4} = 9k^2 - 13(k^2 - 4) = -4k^2 + 52 \geq 0$$

従って $k^2 \leq 13$ より、 $-\sqrt{13} \leq k \leq \sqrt{13}$ となる。
 k の最大値は $\sqrt{13}$ であり、このとき x は

$$13x^2 - 6\sqrt{13}x + 9 = 0$$

をみたす。 $(\sqrt{13}x - 3)^2 = 0$ から $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ となり、こ

のとき $x + 2y = \sqrt{13}$ より、 $y = \frac{5}{\sqrt{13}}$ となる。

k の最小値は $-\sqrt{13}$ であり、このとき x は

$$13x^2 + 6\sqrt{13}x + 9 = 0$$

をみたす。 $(\sqrt{13}x + 3)^2 = 0$ から $x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ となり、

このとき $x + 2y = -\sqrt{13}$ より、 $y = -\frac{5}{\sqrt{13}}$ となる。

解説

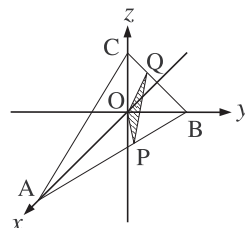
x がある値をとるか否かは、対応する実数 y が存在するか否かで決まる。このことに気がつけば、判別式を考えればよいことがわかる。

2

出題のねらい

空間におけるベクトル、三角比、図形の計量の融合問題である。

解答例



(1): $\vec{OP} = \frac{2}{5}\vec{OA} + \frac{3}{5}\vec{OB}$, $\vec{OQ} = \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{OC}$ から、

$$\vec{OP} = \left(\frac{6}{5}, 0, 0\right) + \left(0, \frac{6}{5}, 0\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, 0\right)$$

$$\vec{OQ} = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right) + \left(0, 0, \frac{4}{3}\right) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

(2): $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \frac{6}{5} \cdot 0 + \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$

(3): $|\vec{OP}| = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$, $|\vec{OQ}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ から、 $|\vec{OP}||\vec{OQ}| = \frac{6\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ で、

$$\cos \angle POQ = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{|\vec{OP}||\vec{OQ}|} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin \angle POQ = \sqrt{1 - \cos^2 \angle POQ} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって、このとき

$$\begin{aligned} \triangle OPQ &= \frac{1}{2} |\vec{OP}||\vec{OQ}| \sin \angle POQ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

解説

(1) 線分の内分点の位置ベクトルを適用して成分表示を求めればよい。

(2) $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ の成分表示から直ちに計算できる。

(3) 上の解答例では、まず $\cos \angle POQ$ を求め、次に三角比の相互関係によって $\sin \angle POQ$ を求めて、最後に $\triangle OPQ = \frac{1}{2} |\vec{OP}||\vec{OQ}| \sin \angle POQ$ によって面積を求めたが、次の公式：

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OP}|^2 |\vec{OQ}|^2 - (\vec{OP} \cdot \vec{OQ})^2}$$

を知っているなら、これを用いてもよい。

出題のねらい

確率の基本的な問題である。問題で与えられた設定を正しく理解し、確率および期待値を正確に計算できるかを問うのが、この問題のねらいである。

解答例

正六角形の6個の頂点の中から異なる2点の選び方は

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

通りある。

(1): 2点の距離が1となるのは、それらが隣り合うときであり、そのような選び方は6通りある。よって求める確率は

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

となる。

(2): 2点の距離が $\sqrt{3}$ となるのは、それらが1つおきに並んでいるときであり、そのような選び方は6通りある。よって求める確率は

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

となる。

(3): 選んだ2点の距離が2となるのは、それらが正六角形の中心に対して対称な位置にあるときであり、そのような選び方は3通りある。よって求める確率は

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

となる。

(4): (1) から (3) の中でそれぞれ事象の確率が得られているので、求める期待値は

$$1 \cdot \frac{2}{5} + \sqrt{3} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{5}$$

となる。

解説

与えられた設定において、各問で問われていることが何かを正しく読み取りさえすれば、(1), (2), (3) は確率の基本的な問題である。ここまで順調に辿り着けば、(4) は簡単に計算することができる。確率の計算だけで満足することなく、期待値の計算まで実際に行うことによって、その意味する事柄までぜひ理解を進めてもらいたい。出題範囲から逸脱するが、余力のある人は、「分散」の計算にもチャレンジしてみよう。

出題のねらい

三角関数の合成と積分に関する計算問題である。

解答例

(1): α を $0 < \alpha < \pi/2$ かつ

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる角とすれば、

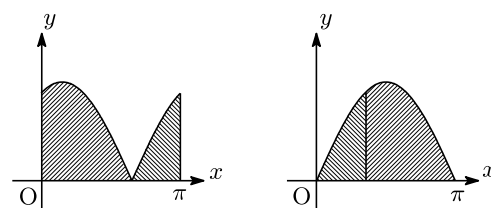
$$\begin{aligned} \sin x + 2 \cos x &= \sqrt{5} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \sqrt{5} (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) \\ &= \sqrt{5} \sin(x + \alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 \leq x \leq \pi$ より $0 < \alpha \leq x \leq \pi + \alpha \leq 3\pi/2$ であるから、所与の関数 $\sin x + 2 \cos x = \sqrt{5} \sin(x + \alpha)$ は $x + \alpha = \pi/2$ すなわち $x = \pi/2 - \alpha$ のとき最大値 $\sqrt{5}$ をとり、 $x = \pi$ のとき最小値 -2 をとる。

(2): 求める面積は次の積分で与えられる。

$$\int_0^\pi |\sin x + 2 \cos x| dx = \sqrt{5} \int_0^\pi |\sin(x + \alpha)| dx$$

ここで以下の面積は等しい。



よって求める面積は次の積分に等しい。

$$\sqrt{5} \int_0^\pi \sin x dx = \sqrt{5} [-\cos x]_0^\pi = 2\sqrt{5}$$

解説

(1) は三角関数の合成を行い、変数の動く範囲から最大・最小値を考えればよい。(2) は積分区間を分けて、被積分関数の絶対値を外して計算してもよいが、求める面積を図示し、合同な部分を考慮すれば、解答例にある簡単な積分計算に帰着できる。