保険と金融の数学

山里　眞（東京女子大学数理科学科）

教科別セミナー（数学）（2017 年８月２５日）

1　序

保険に必要な数学と金融に用いられる数学とではかなりの部分が共通している．しかし異なる部分も有る．それらの相違点について述べてみたい．
共通点：どちらも確率的な現象を対象とする．

- 保険は人の生死や損害の有無，多寡という確率的な現象を対象とし，そのような現象のリスクをカバーしようとする．
- 金融に用いられる数学として特に興味深いのは金融派生商品である．これも株価などという確率現象をもとに商品が作られており，商品の価格付，リスクをいかに回避するかということが問題となる．

2　保険数学

保険業でまず問題となるのはどのような保険商品を作るかということである．保険金や保険料をどのように設定すれば保険会社も保険契約者も納得するか，それを数学ー確率論や統計学ーを用いて説明する必要がある．そのときに基本となるのは大数の法則である．自動車保険でいえば，ある特定の車がいつ事故に遭うかは（確率的な現象なので）予測できないが，多数の車を対象とすればそのうちのどの程度の割合が一定期間に事故を起こすかは予測可能だと考えられる．これが大数の法則の考え方である．この大数の法則から個々の保険の保険金の支払いはいつ起こるかわからないが一定期間の支払いはほぼ一定にすることが出来るであろう．そしてそのことから保険料を決定することが出来る．このことは生命保険数学では収支相等原理と呼ばれている．
もう少し詳しく説明するために確率論の必要な用語を以下で簡単に準備する．

2.1 確率空間

定義 1 Ω を集合，$\mathcal{F}$ が Ω 上の σ-加法族 $\Leftrightarrow$
(F1) $\Omega \in \mathcal{F}$
(F2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
(F3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

定義 2 $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\Leftrightarrow$
(P1) $P(\Omega) = 1$
(P2) $\mathcal{F}$ の互いに素な有限または可算列 $\{A_n\}$ に対し

$$P(\cup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$$

定義 3 組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間という．

2.2 確率変数

定義 4 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ とする．X が確率変数 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega | X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$

定義 5 $E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$ を期待値または平均，
$V(X) = E((X - E(X))^2)$ を分散という．

2.3 独立確率変数列と大数の法則

定義 6 確率変数列 $\{X_n\}_{n\ge1}$ が互いに独立 $\Leftrightarrow \forall m \ge 2, \forall x_1, x_2, \cdots, x_m \in \mathbb{R}$,

$$P(\cap_{k=1}^m \{X_k \le x_k\}) = \prod_{k=1}^m P(X_k \le x_k)$$

定理 1 (大数の法則) $\{X_n\}_{n\ge1}$ が独立同分布な確率変数列，$E|X_n| < \infty \Rightarrow$

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = E(X_1)) = 1$$

自動車保険:車 1 台が 1 年間に事故を起こす確率を p とし，起こさない確率を $q = 1-p$ とする．自動車損害保険契約をした車が n 台あるとする．1 台が 1 年以内に事故を起こしたら保険会社は a 円を支払うものとする．X_k を自動車 k に 1 年間に支払う保険金とすると $\{X_k\}$ は互いに独立な確率変数列で $P(X_k = a) = p, P(X_k = 0) = q$ と考えられる．$E(X_k) = a \cdot P(X_k = a) + 0 \cdot P(X = 0) = ap$ だから n が大きければ大数の法則より 1 年間に準備すべき保険金は nap 円と考えられる．よって 1 台あたりの保険料は ap 円とすれば良い．

2.4　生命保険の簡単な例

年利率 i, 現価率 $v=\frac{1}{1+i}$,
確定年金：生死に関係なく毎年保険金 1 を支払う．保険料は
期始払 $\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+v+\cdots+v^{n-1}=\frac{1-v^n}{1-v}$
期末払 $a_{\overline{n}|}=v+\cdots+v^n=\frac{v(1-v^n)}{1-v}$
保険加入者の
X：加入時年齢, Y：死亡時年齢，　$Z=Y-X$

$$ {}_tp_x=P(Z>t|X=x),\ {}_{t|}q_x=P(t<Z\le t+1|X=x) $$

定期保険：死亡時，期末払，保険金 $=\sum_{k=0}^{n-1}1_{(k,k+1]}(Z)$

$$ \begin{aligned} \text{保険料 } A^1_{x:\overline{n}|} &= vq_x+v^2{}_{1|}q_x+\cdots+v^n{}_{n-1|}q_x \\ &= E(\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}1_{(k,k+1]}(Z)|X=x)=\text{保険金の期待値} \end{aligned} $$

生命年金：n 年間，生存を条件に保険金（年金）を毎年 1 支払う，保険金 $=1_{(k,\infty)}(Z)$
保険料は
期始払 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=1+vp_x+v^2{}_2p_x+\cdots+v^{n-1}{}_{n-1}p_x=E\big(\sum_{k=0}^{n-1}v^k1_{(k,\infty)}(Z)\big)$
期末払 $a_{x:\overline{n}|}=vp_x+v^2{}_2p_x+\cdots+v^n{}_np_x=E\big(\sum_{k=1}^{n}v^k1_{(k,\infty)}(Z)\big)$

3　金融数学

次に金融派生商品について考えてみよう．金融派生商品（デリバティブ）とは株式などの原資産に関連付けられた商品のことである．

単純な例を考えてみよう．時刻 0 にひと株 $S(0)=2000$ 円の株をひと株時刻 1 に購入する権利を K 円（行使価格）で購入する契約（デリバティブ）をする．この契約では購入は義務ではないとする．すなわち時刻 1 で購入するかどうかは購入者が決定できるものとする．この契約の時刻 1 での価値を X と置こう．この契約は時刻 0 でいくら $(=V_0)$ で売買されると売り手，買い手にとって公平になるか？ただだとすると，時刻 1 での株価 $S(1)$ が K よりも高ければ購入者は $S(1)-K$ 円儲かり，販売者はその分損をする．$S(1)<K$ ならば購入者は買う権利を放棄するだろう．だからただでは不公平である．ではいくらで売買するのが適切か？一つの考え方は保険の場合と同じで株価の期待値 $E(S(1))$ を V_0 とするものである．しかしこの考え方には難点が有る．これが正当化されるのは大数の法則が成り立つときであり，それは独立な多数のものの和に対して成り立つことであり，同じ株をいくら買っても同じものの和だから平均化はされない．したがって別の考え方が必要になってくる．

いま，時刻 1 での株価は確率 1/2 で 4000 円に，確率 1/2 で 1000 円になるとする．時刻 0 での価格を V_0 とし，行使価格を 2000 円とする．時刻 1 での購入者の得

る金額は $4000-K$ 円か 0 円である．銀行の金利 0 とする．このような利益を株のみから得るためにどのように株に投資をすればよいだろうか？π 株を買ってみると株価が 4000 円になれば 4000π 円になり，1000 円になれば 1000π 円になる. これが権利を買ったことによる儲けになるためには

$$\begin{aligned} 4000\pi + (V_0 - 2000\pi) &= (4000-K) = 2000 \\ 1000\pi + (V_0 - 2000\pi) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす必要がある．これを π と V_0 について解くと $3000\pi = 2000$ だから $\pi = 2/3$, $V_0 = 1000\pi = 2000/3$ 円 となる．

このデリバティブを $V_0 = 2000/3$ 円で売った人は 2000/3 円を借金し 2/3 株を時刻 0 に買い，4000/3 円 を支払う．株価が 4000 円になったら株を売り 8000/3 円を得る．借金 2000/3 円を払い，デリバティブに 2000 円を支払って手持ち金額は差し引き 0 円となる．一方，株価が 1000 円になったら手持ち株を売って借金 2000/3 円を支払い手持ち金額は差し引き 0 円となる．

このデリバティブを V_0 円で購入した人は逆の株運用をすると時刻 1 での手持ち金額を 0 にすることが出来る．すなわち，2/3 株を 4000/3 円で空売りする．手元には 2000/3 円が残る．時刻 1 で株価が 4000 円になったら デリバティブの権利を行使し，2000 円を得る．それと手持ちの 2000/3 円を合わせて 2/3 株を 8000/3 円で買い，空売りした相手に渡すと手持ち金額は差し引き 0 円となる．株価が 1000 円になったら権利を行使しない．手持ちの 2000/3 円で 2/3 株を買い，空売りした相手に渡すと手持ち金額は差し引き 0 円となる．

以上よりデリバティブの時刻 0 での価格を $V_0 = 2000/3$ 円とすれば売り手買い手ともに損をしない株（原資産）によるリスクの回避方法があることがあることがわかった．こういう意味でこの価格は公正な価格ということが出来る．また，V_0 がこれより高くても低くてもどちらかが得することになることが次のようにしてわかる．

$V_0 > 2000/3$ としよう．デリバティブを売って V_0 円を得る．2000/3 円に対し先程の売り手の戦略を用いると時刻 1 では際し引き 0 円であるから，$V_0 - 2000/3$ 円が手元に残ったことになる．逆に $V_0 < 2000/3$ だとするとデリバティブを V_0 円で買うが 2000/3 円で買ってから運用を始めたと考えれば買い手の戦略による手持ち金額は 0 円であるから際し引き $2000/3 - V_0$ 円が手元に残る．どちらにしてもただで金を儲ける戦略があることになる．このようにただで儲ける戦略のことを裁定機会という．市場に裁定機会がないことを仮定すれば前述のように時刻 0 でのデリバティブの価格を決めることが出来る．(高いものは買うものではなく売るものである.)

ところで保険の場合は収支相等の原理というものがあったがそれは収入保険料は支出保険金の平均値というものであった．それに相当する考え方が金融にもあるのだろうか？ そのようなものを考えるために次のような確率（測度）を考えよう．

$$E(S(1)) = S(0) = 2000. \tag{1}$$

$P(S(1) = 4000) = p, P(S(1) = 1000) = 1-p,\ 0 < p < 1$ とおくと $E(S(1)) =$

$4000p+1000(1-p)=2000$ だから $p=1/3$. この確率で $E(X)$ を計算すると,

$$E(X)=2000\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{2}{3}=\frac{2000}{3}=C \tag{2}$$

となる．(1) をみたす確率測度をリスク中立確率測度またはマルチンゲール測度という．マルチンゲール測度とは（株価，厳密には割引株価）をマルチンゲールにする確率測度という意味である．これは S の分布＝実確率: $P(S=4000)=\frac{1}{2}$, $P(S=1000)=\frac{1}{2}$ とは無関係に定まるものであることが重要である．また，(2) が保険数学における収支相等の原理に相当するものであることがわかる．

3.1 市場

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を一つの確率空間とする．

定義 7 $\mathcal{F}$ に含まれる σ-加法族の増大列 $\{\mathcal{F}_t\}$ を $(\Omega,\mathcal{F})$ の**フィルトレーション**という． $(0\le s<t\Rightarrow \mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t)$

T（満期）を固定する．$\mathbb{T}=\{0,1,2\ldots,T\}$, または $[0,T]$ とおく．

定義 8 確率変数の族 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を**確率過程**という．

定義 9 確率過程 $\{X_t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$**-適合** $\Leftrightarrow$ $\forall t\in\mathbb{T}$, X_t は $\mathcal{F}_t$-可測

定義 10 $(\Omega,\mathcal{F})$ とその上の $\{\mathcal{F}_t\}$-適合過程：**債券**（銀行預金，安全資産）過程 $S_0(t)$ と**株価**（危険資産）過程 $S_1(t)$ の組 (S_0,S_1) を**金融市場**という．(常に $S_0(0)=1$ と仮定)

定義 11 $\hat{S}_1(t)=S_1(t)/S_0(t)$ を**割引株価**という．

定義 12 $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ とする．$g(S_1(T))$ を**ヨーロピアンオプション**という．
例：

$$\begin{aligned}&(S_1(T)-K)^+ : \text{ヨーロッピアンコールオプション},\\&(K-S_1(T))^+ : \text{ヨーロッピアンプットオプション}\end{aligned}$$

投資：ある投資家の投資は債権 S_0 と株 S_1 への投資のみとする．時刻 t での預金量，株数をそれぞれ $\pi_0(t)$, $\pi_1(t)$ とする．これによる資産総額は

$$V_t=\pi_0(t)S_0(t)+\pi_1(t)S_1(t).$$

$\pi=\{(\pi_0(t),\pi_1(t))\}$, を**ポートフォリオ**または投資戦略という． π_{t+1} は $\mathcal{F}_t$-可測.

$\mathbb{T}=\{0,1,\ldots,T\}$ とする． このとき $\Delta S(t)=S(t)-S(t-1)$ とおく．

定義 13

$$\begin{aligned}&\pi \text{ は } \textit{self-financing}\\ \Leftrightarrow\ & V_t=V_0+\sum_{s=1}^{t}\big(\pi_0(s)\Delta S_0(s)+\pi_1(s)\Delta S_1(s)\big),\ 1\le\forall t\le T,\\ \Leftrightarrow\ & \Delta V_t=\pi_0(t)\Delta S_0(t)+\pi_1(t)\Delta S_1(t),\ 1\le\forall t\le T\\ \Leftrightarrow\ & \Delta\pi_0(t)S_0(t-1)+\Delta\pi_1(t)S_1(t-1)=0,\ 1\le\forall t\le T\end{aligned}$$

3.2 無裁定機会

リスク無しに儲けることができない市場を**無裁定市場**という．

定義 14 $\{X_t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$-**マルチンゲール** $\Leftrightarrow s < t$ に対し $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ $a.s.$

ここで $E(X_t|\mathcal{F}_s)$ は $\mathcal{F}_s$ に関する条件つき確率による X_t の期待値．条件つき期待値という．$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, $(A \subset \Omega)$ の場合には

$$P(B|\mathcal{F})(\omega) = \begin{cases} P(B|A), & \omega \in A, \\ P(B|A^c), & \omega \in A^c \end{cases}$$

定義 15 割り引き株価をマルチンゲールにする確率測度 Q を**リスク中立確率測度**という．$i.e.,$ $t > s$ ならば

$$E_Q(\hat{S}_1(t)\big|\mathcal{F}_s) = \hat{S}_1(s) \ a.s.$$

これより

$$E_Q(S_1(t)) = S_0(t)S_1(0)$$

危険資産のリターンの平均値が安全資産のそれと同じ．これが名前の由来．

定理 2 市場に裁定機会がない $\Leftrightarrow$ リスク中立確率測度が存在する．

3.3 二項モデル

硬貨を時刻 T まで投げ続けた結果を $\omega = \omega_1, \omega_2 \cdots \omega_T$, $(\omega_t = 0$ または $1)$ とおく．

$$P(\{\omega\}) = p^{\sum_{t=1}^{T}\omega_t} q^{T-\sum_{t=1}^{T}\omega_t}$$

と定義する．$1 \leq t \leq T-1$ に対し

$$P(\omega_t = 1) = p, P(\omega_t = 0) = q = 1 - p$$

である．結果の全体を Ω とおく．株価 $S_1(t)$ が

$$S_1(t+1, \omega) = \begin{cases} uS_1(t, \omega) & \omega_{t+1} = 1, \\ dS_1(t, \omega), & \omega_{t+1} = 0, \end{cases} \quad t \geq 0, u > d > 0$$

と変動するモデルを**二項モデル**という．

問題 1 債券 $S_0(t) = (1+r)^t, r > 0$ とするときの二項モデルに対しリスク中立確率測度 Q を求めよ．

解：$\tilde{E}(S_1(t+1)\big|\mathcal{F}_t) = \hat{S}_1(t)$ より $\tilde{p} = P(\omega_{t+1}=1|\mathcal{F}_t), \tilde{q}P(\omega_{t+1}=0|\mathcal{F}_t)$,

$$\begin{aligned}\tilde{E}(S_1(t+1)/S_0(t+1)|\mathcal{F}_t) &= S_1(t)(u\tilde{p}+d\tilde{q})/S_0(t+1) \\ &= \frac{u\tilde{p}+d\tilde{q}}{(1+r)}S_1(t)/S_0(t).\end{aligned}$$

よって $\frac{u\tilde{p}+d\tilde{q}}{(1+r)} = 1$ より

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d},\ \tilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}.$$

これが $0<\tilde{p}<1$ をみたすには $u>1+r>d$ を満たす必要がある．このとき

$$Q(\{\omega\}) = \tilde{p}^{\sum_{t=1}^T \omega_t}\tilde{q}^{T-\sum_{t=1}^T \omega_t}.$$

定理 3 無裁定機会市場でのオプション $g(S_1(T))$ の時刻 t での価値は

$$g(S_1(T)) = V_0 + \sum_{s=1}^{T}\big(\pi_0(s)\Delta S_0(s) + \pi_1(s)\Delta S_1(s)\big) =: V_T$$

となる *self-financing* ポートフォリオ π による

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t}\big(\pi_0(s)\Delta S_0(s) + \pi_1(s)\Delta S_1(s)\big) = \pi_0(t)S_0(t) + \pi_1(t)S_1(t)$$

であり，かつ

$$V_t = E_Q((1+r)^{-r(T-t)}g(S_1(T))|\mathcal{F}_t).$$

3.4 ブラウン運動と確率積分

定義 16 $\{\mathcal{F}_t\}$-適合過程 $\{B(t)\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$-**ブラウン運動**
$\Leftrightarrow$
(1) $B(0)=0$,
(2) $B(t)-B(s)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立.
(3) $B(t)-B(s) \sim N(0, t-s)$

注意 1 ブラウン運動は t に関し確率 1 で連続
だが，至るところ微分不可能

確率積分： $\int_0^T \pi(t)^2 dt < \infty$ a.s. となる predictable な $\{\pi(t)\}$ に対し $\exists \pi_n(t) = \sum_{k=1}^n \pi_n(t_{k+1})1_{(t_k,t_{k+1}]}(t)$, s.t.

- $\pi_n(t_{k+1}) \in \mathcal{F}_{t_k}, 0 \le t_1 < \cdots < t_n = T$,

- $\lim_{n\to\infty}\int_0^T \left|\pi(t)-\pi_n(t)\right|^2 dt = 0.$

このとき

$$\lim_{n\to\infty} E(\big|X-\sum_{k=1}^{n}\pi(t_k)(B(t_k)-B(t_{k-1}))\big|^2)=0$$

となる X がある．これを $\int_0^T \pi(s)dB(s)$ と表し π のブラウン運動による**確率積分**という.

3.5 Itô 過程と Itô の公式

$X_t=\int_0^t \mu(s)ds+\int_0^t \sigma(s)dB(s)$ と表される確率過程を **Itô 過程**という.

$$dX_t=\mu(t)dt+\sigma(t)dB(t)$$

と簡略化した形に書くことが多い.

定理 4 (Itô の公式) $f(t,x)$ は t に関し C^1 級, x に関し C^2 級とする． $Y_t=f(t,X_t)$ とおくと次が成立.

$$dY_t=f_t(t,X_t)dt+f_x(t,X_t))dX_t+\frac{1}{2}f_{xx}(t,X_t)\sigma^2(t)dt$$

問題 2 $\{B(t)\}$ を 1 次元ブラウン運動とする．*Itô* の公式を用いて次を示せ.

$$B(t)^2-t=2\int_0^t B(s)dB(s)$$

問題 3 *Itô* の公式を用いて $Y_t=e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B(t)}$ がみたす確率微分方程式を導け.

3.6 ブラック・ショールズモデル

$S_0(t)=e^{rt}$, 危険資産 $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ が確率微分方程式

$$dS_1(t)=\mu S_1(t)dt+\sigma S_1(t)dB(t),\ S_1(0)>0,$$

$$d\widehat{S}_1(t)=\widehat{S}_1(t)[(\mu-r)dt+\sigma dB(t)].$$

をみたすモデルを**ブラックショールズモデル**という．$\{L_t\}_{t\geq 0}$ を

$$dL(t)=-\frac{\mu-r}{\sigma}L(t)dB(t),\quad L(0)=1$$

により定まる確率過程としよう．$\frac{dQ}{dP}=L(T)$ で $\mathcal{F}_T$ 上の確率測度 Q を定義する．Q のもとで $B^*(t):=B(t)+\frac{\mu-r}{\sigma}t$ は Q-ブラウン運動. 確率過程 $\{\widehat{S}_1(t)\}_{t\geq 0}$ は $d\widehat{S}_1(t)=\widehat{S}_1(t)\sigma dB^*(t)$ をみたし， $\widehat{S}_1$ は Q-マルチンゲールだから Q がリスク中立確率測度.

定理 5 時刻 t における $g(S_1(T))$ の価値 V_t は

$$g(S(T)) = V_0 + \int_0^T \pi_0(s)dS_0(s) + \int_0^T \pi_0(s)dS_1(s)$$

となる *self-financing* ポートフォリオ $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ による

$$V_t = V_0 + \int_0^t \pi_0(s)dS_0(s) + \int_0^t \pi_1(s)dS_1(s)$$

であり

$$V_t = E_Q[e^{-r(T\,-\,t)}g(S_1(T))|\mathcal{F}_t]$$

である．

定理 6 (Black-Scholes の公式) ヨーロッピアンコールオプション $g(S_1(T)) = (S_1(T) - K)^+$ の時刻 t での価格は

$$C(t, S_1(T)) = S_1(T)\Phi(d_+(t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(t))$$

である．ここで

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du,$$

$$d_\pm(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\{\ln(\frac{S_1(T)}{K}) + (T-t)(r \pm \frac{\sigma^2}{2})\}.$$

$g(S_1(T))$ を達成する戦略は

$$\begin{aligned} \pi_0(t) &= \{C(t, S_1(t)) - S_1(t)C_x(t, S_1(t))\}/S_0(t) \\ \pi_1(t) &= C_x(t, S_1(t)) \end{aligned}$$

である．

証明の概略：t を固定する． $s \in [t, T]$ でインデックスされた $Z_s^{x,t}$ を

$$Z_s^{x,t} = x + r\int_t^s Z_u^{x,t}du + \sigma\int_t^s Z_u^{x,t}dB(u)$$

で定まる確率過程とする．$0 \le t \le T$ となる t に対して

$$\begin{aligned} S_1(T) &= S_1(t)\exp\left[r(T-t) + \sigma(B^*(T) - B^*(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right] \\ &= \frac{S_1(T)}{S_1(t)}S_1(t) \end{aligned}$$

と表せ， $S_1(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測で $S_1(T)/S_1(t)$ は $\mathcal{F}_t$ と独立だから

$$E_Q(g(S_1(T))|\mathcal{F}_t) = E_P(e^{-r(T-t)}g(Z_{T-t}^{x,0}))\Big|_{x=S_1(t)}$$

を得る．

初期時刻が t なら，$\log(Z_s^{x,t})$ の分布は

$$N(\log x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t), \sigma^2(s-t))$$

である．よって $f_t(u)$ を $N(\log x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ の密度関数とすると，

$$\begin{aligned} E[e^{-r(T-t)}g(Z_T^{x,t})] &= e^{-r(T-t)}E[g(Z_T^{x,t})] \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} g(e^u)f_{T-t}(u)du, \end{aligned}$$

とおく．表現

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(e^u)f_{T-t}(u)du = \int_{\{u>\ln K\}} e^u f_{T-t}(u)du - K\int_{\{u>\ln K\}} f_{T-t}(u)du,$$

を用いて

$$\begin{aligned} C(t,x) &= x\Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\{\ln(\frac{x}{K}) + (T-t)(r+\frac{\sigma^2}{2})\}) \\ &\quad -Ke^{-r(T-t)}\Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\{\ln(\frac{x}{K}) + (T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})\}) \end{aligned}$$

を得る．

4 演習問題の解答

- リスク中立測度の算出：$\tilde{p} := Q(\omega_{t+1} = 1|\mathcal{F}_t), \tilde{q} := Q(\omega_{t+1} = 0|\mathcal{F}_t)$, とおくと，$E_Q(\hat{S}_1(t+1)\big|\mathcal{F}_t) = \hat{S}_1(t)$ より

$$\begin{aligned} E_Q(S_1(t+1)/S_0(t+1)|\mathcal{F}_t) &= S_1(t)(u\tilde{p} + d\tilde{q})/S_0(t+1) \\ &= \frac{u\tilde{p}+d\tilde{q}}{(1+r)}S_1(t)/S_0(t). \end{aligned}$$

よって $\frac{u\tilde{p}+d\tilde{q}}{(1+r)} = 1$ より

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d},\ \tilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d}.$$

これが $0 < \tilde{p} < 1$ をみたすには $u > 1+r > d$ を満たす必要がある． このとき

$$Q(\{\omega\}) = \tilde{p}^{\sum_{t=1}^T \omega_t}\tilde{q}^{T-\sum_{t=1}^T \omega_t}.$$

- 伊藤の公式による計算
  解答２．Itô の公式より
$$dB(t)^2 = 2B(t)dB(t) + \frac{1}{2}\cdot 2dt = 2B(t)dB(t) + t, B(0) = 0$$
  解答３．
$$Y_t = e^{X_t}, X_t = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \sigma \int_0^t dB(s)$$
  だから Itô の公式より
$$dY_t = e^{X_t}((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt) = Y_t(\mu dt + \sigma dB(t))$$

5　まとめ

- 収支相等の原理：保険数学の基本原理
- 無裁定機会
- リスク中立測度,
- Itô の公式　：連続だが微分可能でない確率過程に対する連鎖律
- ブラック・ショールズ Brownian Market でのヨーロッピアンコールオプションに対する価格公式

参考文献

[1] 黒田耕嗣ほか. 生命保険数理. 日本評論社，2016

[2] R-A. Danna, M. Jeanblanc　Financial Markets in Continuous Time,　*Springer Finance Textbook*. 2007.